Volume 12 Nomor 1
November 2013

ISSN : 1412 - 5056

UNIVERSITAS ISLAM BANDUNG

MATEMATIKA

• JURNAL TEORI DAN TERAPAN MATEMATIKA •

Diterbitkan Oleh :

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
Fakultas Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Bandung

II. A. 1. b. 3 (a)

Volume 12 Nomor 1
November 2013
ISSN : 1412 - 5056

MATEMATIKA

• JURNAL TEORI DAN TERAPAN MATEMATIKA •

PENANGGUNG JAWAB
M. Yusuf Fajar, Drs., M.Si.
(ex. officio Dekan Fakultas MIPA UNISBA)

KETUA PENYUNTING
Gani Gunawan, S.Si., M.Si.

PENYUNTING PELAKSANA
DR.Yani Ramdhani, Dra., M.Pd.
Eti Kurniati, Dra., M.Si.
Onoy Rohaeni, Dra., M.Sc.
DR. Didi Suhaedi, S.Si., M.Kom.
Yurika Permanasari, S.Si., M.Kom.
Farid Hirji Badruzzaman, Drs.
Erwin Harahap, S,Si., M.Sc.
Icih Sukarsih, S.Si., M.Si.

SEKRETARIAT
Tinne Susiana
Mastur, S.Pd.I.

ALAMAT REDAKSI
Program Studi Matematika FMIPA UNISBA
Jl. Ranggamalela No. 1 Bandung 40116
e-mail : math_unisba@unisba.ac.id
Telp. (022)4203368 Pes.136
fax. (022)440678

PENGANTAR REDAKSI

Bismillahirrahmanirrahim
Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Dengan mengucapkan Alhamdulillah, segala puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT bahwa Jurnal Matematika volume 12 No.1 ini dapat terbit di hadapan pembaca.

Seluruh artikel yang dimuat pada edisi kali ini merupakan hasil penelitian, analisis dan studi literatur di bidang matematika dan terapannya, yang sebagian besar ditulis oleh para dosen matematika di luar Unisba.

Keseluruhan artikel yang disajikan pada edisi kali ini diharapkan dapat menambah wawasan pemikiran dan pengetahuan di bidang kajian matematika dan menambah wawasan penerapan matematika di bidang ilmu lainnya bagi para pembaca.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada para penulis yang telah mengirimkan artikelnya yang dimuat dalam jurnal terbitan kali ini. Kami mengharapkan para peneliti di bidang matematika dapat megirimkan hasil penelitiannya untuk dimuat pada Jurnal Matematika edisi berikutnya.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Redaksi

Volume 12 Nomor 1
November 2013

ISSN : 1412 - 5056

MATEMATIKA

•JURNAL TEORI DAN TERAPAN MATEMATIKA•

Daftar Isi

Jurnal Matematika Vol.12 No.1
November 2013 [9 :16]

RING-RING YANG MEMENUHI SIFAT ABELIAN

Yanita

JurusanMatematika FMIPA Universitas Andalas Padang
Kampus Unand Limau Manis, Padang 25163
yanita@fmipa.unand.ac.id

Abstract. This article discusses about the rings that are abelian ring. Ring discussed are commutative and non-commutative ring. The purpose of this article is to show that the abelian properties of a ring are not directly related to the commutative properties. Commutative and non-commutative ring can be abelian ring.

Keyword: *commutative ring, noncommutative ring, abelian ring*

Abstrak. Artikel ini membahas tentang ring-ring yang memenuhi sifat abelian. Adapun ring yang disajikan adalah ring komutatif dan ring takkomutatif. Tujuan dari tulisan ini untuk memperlihat kan bahwa sifat abelian dari suatu ring tidak terkait langsung dengan sifat komutatifnya. Ring komutatif dan ring takkomutatif bias menjadi ring abelian

Kata Kunci: *ring komutatif, ring tak-komutatif, ring abelian*

1. Pendahuluan

Semua ring yang dibahas dalam artikel ini diasumsikan mempunyai unsur satuan. Pada teori group, jika group tersebut komutatif, maka group tersebut dinamakan group abelian. Tetapi ketika berbicara tentang ring, jika ring tersebut ring komutatif, maka tidak pernah disebutkan sebagai ring abelian, hanya ring komutatif.

Ring R disebut *abelian* jika setiap unsur idempotennya adalah unsur central (lihat [5]).Unsur a disebut unsur *central* dari ring R jika untuk setiap $b \in R$ berlaku $ab = ba$ dan himpunan semua unsur central disebut *center* dan didefinisikan dengan $C(R) = \{a \in R \mid ab = ba \text{ untuk setiap } b \in R\}$. Berdasarkan definisi ring abelian ini, diperoleh bahwa tidak ada syarat komutatif untuk ring abelian. Namun demikian, dapat dilihat hubungan antara ring komutatif dan ring abelian, demikian juga terdapat hubungan antara ring takkomutatif dengan ring abelian.

Dalam artikel ini, dibahas mengenai ring-ring yang memenuhi sifat abelian baik untuk ring komutatif ataupun ring tak-komutatif. Pembahasan yang dilakukan dalam artikel ini bersifat mengulas kembali sifat-sifat yang telah dibahas pada [2], [3], [4], [5] dan [7] kemudian mengelompokan ring-ring yang dibahas tersebut berdasarkan sifat komutatif dan tak-komutatif. Sifat-sifat yang dikerjakan sendiri oleh penulis adalah Teorema 2.1, Lemma 2.3, Lemma 2.4 dan Lemma 3.10, sementara sifat-sifat di luar yang penulis sebutkan diulas kembali secara rinci dan mendalam.

2. Ring Komutatif yang Abelian

Sesuai dengan tujuan dari tulisan ini, yaitu memberikan pemahaman bahwa ring abelian bukanlah ring komutatif, maka pembahasan pertama yang akan diberikan adalah memberikan suatu teorema yang menyatakan tentang sifat ini.

Teorema 2.1.

Jika R ring komutatif maka R ring abelian, sebaliknya belum tentu berlaku.

Bukti:

Ring R disebut *abelian* jika setiap unsur idempotennya adalah unsur central. Di mana unsur a disebut unsur *central* dari ring R jika untuk setiap $b \in R$ berlaku $ab = ba$. Jadi, untuk membuktikan bahwa suatu ring R adalah abelian harus dibuktikan setiap unsur idempotennya adalah unsur central.

Misalkan R ring komutatif dan e sebarang unsur idempoten di R. Ambil sebarang x di R, diperoleh $e^2x = ex = xe$ (karena R ring komutatif). Jadi untuk setiap x di R berlaku $ex = xe$, artinya e unsur central. Sehingga terbukti R ring abelian.

Untuk menyangkal bahwa sebaliknya belum tentu berlaku perhatikan *counter example* berikut: Pandang suatu himpunan matriks n x $n$yang anggota-anggotanya berada di ring himpunan bilangan riel $\mathbb{R}$, yang kemudian disebut ring matriks berordo n. Himpunan matriks ini akan membentuk ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Seperti diketahui bahwa ring ini bukanlah ring komutatif. Kemudian perhatikan bahwa unsur idempoten di ring ini adalah matriks nol (0) dan matriks identitas I_n. Matriks nol dan matriks identitas ini kemudian jelas akan menjadi unsur central, karena $(0)A = A(0)$ dan $AI_n = I_nA$ untuk setiap matriks Adi ring matriks berordo n ini.Dengandemikian ring iniadalah ring abelian.Hal ini memberikan gambaran bahwa ring abelian belum tentu ring komutatif.

■

Berdasarkan Teorema 2.1 ini kemudian dapat disimpulkan bahwa ring-ring yang komutatif merupakan ring abelian (termasuk di dalamnya daerah integral, lapangan, daerah faktorisasi tunggal). Berikut ini akan disajikan ring-ring yang komutatif yang memenuhi sifat abelian yang pembuktiannya berdasarkan Teorema 2.1. Pembahasan dimulai dengan ring Noetherian dan ring lokal (*local ring*).

Suatu ring komutatif R diebut *Noetherian* jika setiap idealnya dibangun secara berhingga. Suatu ideal I dalam ring R(kiri/kanan/kiridankanan) disebut sebagai ideal yang dibangun secara berhingga jikat erdapat $X \subset I$, yaitu X himpunan bagian berhingga $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sehingga ideal yang dibangun oleh X adalah I, yaitu setiap unsur dari I dapat disajikan sebagai R-kombinasi linier dari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Terutama, setiap daerah ideal utama adalah ring *Noetherian* (lihat [1]) . Untuk lebih jelasnya akan diberikan definisi ring *Noetherian.*

Definisi 2.2.

Suatu ring komutatif R disebut ring Noetherian (kiri) jika R modul (kiri) atas dirinya sendiri, akibatnya syarat rangkaian naik (ascending chain condition) atau syarat maksimum dipenuhi untuk ideal-ideal (kiri)-nya atau setiap ideal (kiri) dibangun secara berhingga.

Lapangan, ring pembagi (*division ring*), daerah ideal utama adalah contoh-contoh ring *Noetherian.*Ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ juga merupakan ring *Noetherian.*

Dari keterangan di atas terlihat bahwa ring Noetherian adalah ring komutatif, sehingga memunculkan teorema berikut:

Lemma 2.3.

Jika R ring Noetherian maka R ring abelian.

Bukti:

R ring Noetherian berarti R ring komutatif. Menurut Teorema 2.1 R ring abelian.

■

Suatu ring R disebut ring lokal (*local ring*) jika R ring komutatif dengan unsur satuan dan mempunyai ideal maksimal yang tunggal (lihat [6]). Contohnya adalah $\mathbb{Z}_{p^n}$ dengan p bilangan prima dan $n \geq 1$.

Lemma 2.4.

Jika R ring lokal maka R ring abelian.

Bukti:

R ring lokal berarti R ring komutatif. Menurut Teorema 2.1 R ring abelian.

■

Teorema 2.1, Lemma 2.3 dan Lemma 2.4 memberikan karakteristik khusus untuk ring yang dibuktikan sifat keabeliananya yaitu ring komutatif.

Kemudian pembahasan dilanjutkan dengan membahas contoh-contoh ring (tidak komutatif) yang merupakan ring dengan sifat abelian. Ring-ring yang dimaksud di sini adalah ring polinomial, ring tereduksi, ring Armendariz, ring von Neumann reguler dan ring semikomutatif.

3. Ring Tak Komutatif yang Abelian

Pada bagian ini akan dibahas mengenai ring-ring yang tak komutatif tetapi mempunyai sifat abelian. Pembahasan pertama dimulai dengan ring polinomial. Misalkan R ring dan himpunan semua polinomial dengan koefisien berada di ring R, disebut ring polinomial dengan simbol $R[x]$. $R[x]$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial akan membentuk ring.

Lemma 3.1.

Misalkan R ring dengan unsur satuan dan $R[x]$ adalah ring polinomial maka $R[x]$ ring abelian.

Bukti:

(Untuk kekomutatifan $R[x]$ perhatikan teorema berikut: *Jika R ring komutatif maka $R[x]$ juga ring komutatif* akibatnya $R[x]$ adalah ring abelian menurut Teorema 2.1). Perhatikan di dalam $R[x]$ polinomial '0' dan polinomial '1', jika R punya unsur satuan, maka '1' adalah unsur idempotennya sehingga '0'.$f(x) = f(x)$.'0' dan '1'.$f(x) = f(x)$.'1' untuk setiap $f(x) \in R[x]$. Jadi polinomial '0' dan '1' adalah unsur central.

■

Ring R disebut ring tereduksi jika unsur nilpoten dalam R hanyalah nol (lihat [5])Suatu unsur a dalam ring R disebut nilpoten jika $a^n = 0$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Ingat kembali bahwa unsur e dalam ring R disebut idempoten jika $e^2 = e$. Jadi, jelaslah bahwa unsur '1' dan '0' adalah unsur idempoten.

Contoh 3.2.

Himpunan bilangan bulat modulo 4 adalah ring tereduksi karena unsur nilpoten di dalam $\mathbb{Z}_4$ hanyalah $\overline{0}$, sedangkan himpunan bilangan bulat modulo 6` adalah ring tak tereduksi karena unsur nilpoten dalam $\mathbb{Z}_6$ adalah $\overline{0}$ dan $\overline{2}$.

Berikut ini akan dibahas mengenai ring Armendariz yang merupakan ring abelian, tetapi akan diberikan terlebih dahulu definisi ring Armendariz. Untuk sifat-sifat lebih lanjut tentang ring ini dapat dilihat pada [2], [3], [5] dan [7].

Definisi 3.3.

Suatu ring R dikatakan mempunyai sifat Armendariz (ring Armendariz) jika berlaku:

$(\forall f(x) \in R[x])(\forall g(x) \in R[x]),\ f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\quad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$,dan

$f(x)g(x) = 0 \Rightarrow (\forall i, j) a_i b_j = 0$.

Lemma 3.4.

R ring Armendariz, maka:

1. Jika $a, b, c \in R$ dan $ab = 0$, sedemikian hingga $ac^n b = 0$ untuk suatu $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$, maka $acb = 0$.
2. Jika $a, b, c \in R$ dan $ab = 0$, c^n central untuk suatu $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$, maka $acb = 0$.

Teorema 3.5.

Jika R ring Armendariz, maka R ring abelian.

Bukti:

Misalkan R sebarang ring Armendariz. Akan dibuktikan R abelian. Untuk membuktikan ring R Armendariz abelian berarti harus dibuktikan setiap idempoten di R adalah central. Ambil $e \in R$ dengan e unsur idempoten, dibuktikan e central di R. Misalkan $a = e$, $b = 1 - e$ dan $c = er(1 - e)$ dengan $r \in R$, maka:

$ab = e(1 - e) = e - e^2 = e - e = 0$

dan

$c^2 = er(1-e)er(1-e) = e^2r^2(1-2e+e^2) = e^2r^2(1-e) = e^2r^2 - e^2r^2e = e^2r^2 - e^2r^2 = 0$

Dari Lemma 3.4 $acb = 0$. Misalkan $a_1 = 1-e$, $b_1 = e$ dan $c_1 = (1-e)re$ diperoleh $a_1b_1c_1 = (1-e)e(1-e)re = (1-e)(e-e^2)re = (1-e)(e-e)re = 0$. Dengan demikian diperoleh e central. Terbukti ring Armendariz abelian.

■

Lemma 3.6.

Jika R ring tereduksi maka R adalah ring abelian.

Bukti:

Misalkan $fg = 0$; Tanpa mengurangi keumuman bukti dapat diasumsikan $n = m$. Dari definisi pergandaan polinomial diperoleh:

$$fg = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^{i+j} \quad \text{dengan} \quad c_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$$

yaitu :

$c_0 = a_0 b_0$; $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$; $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$; $\cdots$; $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$

Karena $fg = 0$ diperoleh $c_k = 0$ untuk setiap k. Jadi:

1. $a_0 b_0 = 0$
2. $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$
3. $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$

$\vdots$

k. $a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = 0$

Terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa :

$$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ba = 0 \quad \forall a, b \in R.$$

Karena diketahui $ab = 0$, dibuktikan $ba = 0$. Andaikan $ba \neq 0$. Karena R tereduksi diperoleh ba bukan unsur nilpoten, yang artinya $(ba)^n \neq 0 \quad \forall n$. Ambil $n = 2$ diperoleh $(ba)^2 = baba \neq 0$. Padahal diketahui $ab = 0$ sehingga $(ba)^2 = baba = b.0.a = 0$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi yang benar $ba = 0$. Sebaliknya analog.

Dengan pernyataan di atas diperoleh $b_0 a_0 = 0$. Kemudian perhatikan jika persamaan (2) dikalikan dari sisi kiri dengan b_0, diperoleh $b_0 a_0 b_1 + b_0 a_1 b_0 = 0$. Dari (1) diperoleh $b_0 a_0 = 0$ sehingga $b_0 a_1 b_0 = 0$. Kemudian diperoleh $(a_1 b_0)^2 = a_1 b_0 a_1 b_0 = a_1.0 = 0$ atau $a_1 b_0$ unsur nilpoten indeks 2. Dari sini diperoleh $a_1 b_0 = 0$, sebab R tereduksi.

Kemudian jika persamaan (3) dikalikan dari sisi kiri dengan b_0, diperoleh $b_0 a_0 b_2 + b_0 a_1 b_1 + b_0 a_2 b_0 = 0$. Seperti pada kasus sebelumnya, $a_1 b_0 = 0 \Leftrightarrow b_0 a_1 = 0$, jadi diperoleh $b_0 a_2 b_0 = 0$. Dari sini $(a_2 b_0)^2 = a_2 b_0 a_2 b_0 = a_2.0 = 0$ sehingga diperoleh $a_2 b_0 = 0$. Demikian seterusnya sampai diperoleh $a_i b_0 = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

Kemudian dengan menggunakan $a_0 b_1 = 0 \Leftrightarrow b_1 a_0 = 0$, jika persamaan (3) dikalikan dengan b_1 dari sisi kiri, diperoleh: $b_1 a_0 b_2 + b_1 a_1 b_1 + b_1 a_2 b_0 = 0$. Dari sini diperoleh $b_1 a_1 b_1 = 0$, kemudian diperoleh $(a_1 b_1)^2 = a_1 b_1 a_1 b_1 = a_1.0 = 0$, jadi $a_1 b_1 = 0$. Demikian seterusnya sampai diperoleh $a_i b_1 = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

Langkah ini berulang hingga diperoleh $a_i b_j = 0 \; \forall i, j$. Jadi terbukti: jika $fg = 0$, maka $a_i b_j = 0 \; \forall 0 \le i \le n, 0 \le j \le m$. Jadi terbukti R ring Armendariz. Akibatnya R ring abelian menurut Teorema 3.5.

■

Pembahasan selanjutnya mengenai ring von Neuman regular.

Definisi 3.7.

Ring R disebut ring von Neumann reguler jika untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ sehingga aba = a.

Contoh 3.8.

Misalkan $M_n(F)$ adalah himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ atas field F. Untuk setiap $A \in M_n(F)$ terdapat $X \in M_n(F)$ sehingga $AXA = A$.

Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut:

Bukti:

Untuk setiap matriks A terdapat matriks non singular P dan Q sedemikian hingga $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dengan r rank matriks A. Akibatnya diperoleh $A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$

Sebut $X = Q\begin{pmatrix} I & U \\ V & W \end{pmatrix}P$ dengan U, V, W matriks sebarang, sehingga:

$$\begin{aligned} AXA &= \left(P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}\right)\left(Q\begin{pmatrix} I & U \\ V & W \end{pmatrix}P\right)\left(P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}\right) \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(Q^{-1}Q)\begin{pmatrix} I & U \\ V & W \end{pmatrix}(PP^{-1})\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & U \\ V & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

■

Teorema 3.9.

Jika R ring von Neumann reguler, maka kondisi berikut ekivalen:

1) R ring Armendariz
2) R ring tereduksi
3) Jika perkalian dua buah polinomial hasilnya 0, maka perkalian koefisiennya juga sama dengan 0.

Bukti:

Untuk pembuktian 1) $\Rightarrow$ 3) berdasarkan Definisi 3.3 dan pembuktian 2) $\Rightarrow$ 1) berdasarkan Lemma 3.6. Jadi tinggal membuktikan 3) $\Rightarrow$ 2). Perlu diingat bahwa kondisi 3) tidak akan terpenuhi ketika diperoleh $(ax+b)(a_0x+b_0)=0$ tetapi $-ba_0 = ab_0 \neq 0$ atau ekivalen ketika $bAnn_R(a) \cap aAnn_R(b) \neq 0$ (catatan : $Ann_R(a)$ adalah annihilator kanan dari a, dengan definisi $Ann_R(a) = \{x \in R \mid ax = 0, a \in S\}$ dengan S subset dari ring R dan $S \neq \phi$). Dengan demikian untuk $a,b \in R$, diperoleh $bAnn_R(a) \cap aAnn_R(b) = 0$. Misalkan $e, f \in R$, adalah unsur idempoten. Pilih $b = e$ dan $a = 1 - f$ dan dicatat bahwa $Ann_R(b) = (1-e)R$ dan $Ann_R(a) = fR$, sehingga diperoleh $e f R \cap (1-f)(1-e)R = 0$. Selanjutnya misalkan e dan f unsur idempoten dengan $fe = 0$. Maka $e f = (1-e)(1-f) \in e f R \cap (1-f)(1-e)R = 0$. Jadi untuk sebarang idempoten $e \in R$, dan sebarang $r \in R$, $x = e + er(1-e)$ adalah unsur idempoten dengan $(1-e)x = 0$ dan karenanya $x(1-e) = 0$. Dengan demikian jika $er(1-e) = 0$ maka $eR(1-e) = 0$. Akibatnya R ring tereduksi.

■

Lemma 3.10.

Jika R ring von Neumann reguler maka R ring abelian.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.9 diperoleh R ring Armendariz dan dengan Teorema 3.5 diperoleh R ring abelian.

■

Pembahasan berikut ini tentang ring semikomutatif, dengan terlebih dahulu diberikan definisi dari ring semikomutatif. Sifat-sifat lebih lanjut dapat dilihat pada [4] dan [7].

Definisi 3.11.

Ring R disebut semikomutatif jika R memenuhi syarat $a, b \in R$, dengan $ab = 0$, maka $acb = 0$ untuk setiap $c \in R$.

Definisi 3.12.

Ring R disebut semikomutatif jika untuk setiap $a \in R$, $\{b \in R \mid ab = 0\}$ adalah ideal di R.

Teorema 3.13.

Definisi 3.11 ekivalen Definisi 3.12.

Lemma 3.14.

Jika R ring semikomutatif, maka R ring abelian.

Bukti:

Ambil sebarang unsur idempoten e di R. Misal $a = e$, $b - 1 - e$, diperoleh $ab = e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$. Karena R ring semikomutatif maka $acb = 0$ untuk setiap $c \in R$. Pilih $c - er(1-e)$ dengan $r \in R$. Kemudian misalkan $a_1 - 1 - e$, $b_1 = e$, diperoleh $a_1 b_1 = 0$. Karena R ring semikomutatif, $a_1 c_1 b_1 = 0$ untuk setiap $c_1 \in R$. Pilih $c_1 = (1-e)er$ dengan $r \in R$. Jadi diperoleh $acb = a_1 c_1 b_1$ atau $er = re$. Terbukti R ring abelian.

■

Teorema 3.5, Teorema 3.6, Lemma 3.10 dan Lemma 3.14 memberikan karakteristik khusus untuk ring yang dibuktikan keabelianannya, yaitu ring tak komutatif.

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian yang dibahas pada bagian 2 dan 3, dapat diambil kesimpulan bahwa ring abelian tidak sama dengan ring komutatif. Ring abelian dapat berupa ring komutatif dan ring tak komutatif.

Daftar Pustaka

[1] W. A. Adkins& S. H. Weintraub. (1992). *Algebra Approach via Module Theory,* Springer – Verlag, New York.1992.

[2] D. D. Anderson & V. Camillo. (1998) Armendarizring and Gaussian ring. *Communication in Algebra,* 26:7, 2265-2272.

[3] E. P. Armendariz. (1974). A note on extensions of Baer and P.P-rings.*J. Austral. Math. Soc.* 18 (1974), 470-473.

[4] C.Huh, Y. Lee&A. Smoktunowicz. (2002). Armendariz rings and semicomutative rings.*Communication in Algebra*, 30:2, 751-761.

[5] N. K.Kim&Y.Lee. (2000). Armendariz rings and reduced rings. *Journal Algebra*, 223, 477-488.

[6] T. Y. Lam. (2003). *Exercises in Classical Ring Theory.*Springer – Verlag, New York.

[7] M. B. Rege, &S. Chhawchharia. (1997). Armendariz rings. *Proc. Japan Acad.* 73, ser. A. 14-17.